

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA USO DE APLANÁTICO COMO CONCENTRADOR TÉRMICO

**Gomes, E. T. A. ; Fraidenraich, N.; Vilela, O. C.**

Fontes Alternativas de Energia (FAE) – Departamento de Energia Nuclear (DEN), Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Av. Prof. Luiz Freire, 1000, CEP: 50740-540 Recife (PE), Brasil  
emails: [emerson.torres@ufrpe.br](mailto:emerson.torres@ufrpe.br) ; [etagoes@hotmail.com](mailto:etagoes@hotmail.com)

*Recibido 10/08/16, aceptado 09/10/16*

**RESUMO:** O presente trabalho consiste em realizar fundamentação teórica de fatores que afetam o desempenho de sistemas de concentração solar, bem como apresentar o aplanático como uma alternativa à concentração solar. É feita uma revisão e conceitos como aberração esférica e coma presentes na maioria dos espelhos e lentes. Em seguida é apresentado o aplanático, que historicamente foi utilizado em dispositivos de precisão como telescópio, e atualmente é utilizado também como concentrador formador de imagem livre de aberração esférica e coma. O trabalho é voltado para fornecer o embasamento teórico para a utilização do aplanático na concentração solar, bem como analisar as diversas configurações dele de acordo com os parâmetros adimensionais que o determinam. Em seguida, são analisadas as configurações mais adequadas para o uso do aplanático como concentrador, e finalmente as concentrações efetivas obtidas tanto na configuração aplanático elíptico, quanto no aplanático hiperbólico.

Palavras-chave: aplanático, ótico, concentrador solar, aberração esférica, coma.

### INTRODUÇÃO

Quando se busca concentração solar por meio de concentração de fluxo, busca-se alcançar temperaturas elevadas para aumentar a eficiência na conversão termo-elétrica. Em concentradores solares térmicos, a temperatura alcançada é essencial para a eficiência da conversão solar térmica em elétrica, dependendo fundamentalmente da configuração proposta para a conversão. Há diversas configurações que geram energia elétrica a partir da geração solar térmica, como: refletor linear de Fresnel, concentrador cilindro-parábola, torre solar, disco parabólico, dentre outros.

Uma característica comum a essas configurações é que elas apresentam aberrações esféricas e coma, que reduzem a concentração solar. Os espelhos aplanáticos, conhecidos desde o início do século 20, foram, e são estudados, por diversos autores (Schwarzschild, 1905), (Wassermann e Wolf, 1949), (Welford, 1976), (Mertz, 1979). Inicialmente a aplicação do aplanático era restrita a instrumentos de geração de imagem de elevada precisão, como o telescópio. Mais recentemente, (Lynden-Bell, 2002) e (Willstrop, 2003) derivaram expressões analíticas para a construção do aplanático, o que possibilitou a utilização de espelhos com essas características desejáveis em concentração solar. O presente trabalho se propõe a realizar uma fundamentação conceitual sobre as condições que levam a um espelho ser considerado aplanático, com o objetivo de propor uma configuração de concentrador solar por fluxo com dupla reflexão eliminando aberrações esféricas e coma, de forma a otimizar a concentração.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 CONCENTRAÇÃO SOLAR LIMITE TERMODINÂMICO

A concentração solar por fluxo, quando se deseja gerar energia elétrica a partir do sol, necessita de elevadas temperaturas para a melhoria da eficiência do ciclo termodinâmico na conversão termoelétrica. Nesse sentido, duas definições de concentração são naturais e têm sido utilizadas com frequência (Rabl, 1985). A primeira definição relaciona o fluxo de radiação da abertura ( $I_{Ap}$ ) com o fluxo de radiação no absorvedor ( $I_{Abs}$ ) (Eq. 1).

$$C_{flux} = \frac{I_{Ap}}{I_{Abs}} \quad (1)$$

A segunda definição é estritamente geométrica, relacionando a área da abertura ( $A_{Ap}$ ) com a área da superfície absorvedora ( $A_{Abs}$ ) (Eq. 2). Esse conceito de concentração é mais adequado à concentração solar por uso de coletores térmicos.

$$C = C_{geom} = \frac{A_{Ap}}{A_{Abs}} \quad (2)$$

Cumprindo a primeira e segunda leis da Termodinâmica que tratam da conservação da energia e do fluxo natural do calor que sai de um corpo com temperatura maior para outro com temperatura menor (Winston, 1970) (Melnikov, 1966), temos a concentração ideal para concentradores bidimensionais baseada nesse limite termodinâmico (Eq. 3):

$$C_{ideal2D} = \frac{1}{\sin^2 \theta_s} \quad (3)$$

Em todos os raios que ingressando pela abertura, dentro do intervalo do ângulo de aceitação, eles são refletidos para o absorvedor em concentradores ideais. Os raios que chegam com ângulo maior que o ângulo de aceitação se propagam ao longo da cavidade e retornam ao ambiente (Rabl, 1985).

O grande desafio da concentração solar por fluxo é manter a concentração mais próxima da ideal, para tanto, busca-se analisar a aplicação configurações que apresentem menores imperfeições óticas. Nesse sentido, os aplanáticos com primário e secundário, apresentam-se como uma alternativa, visto que eliminam aberração esférica e coma, possibilitando aumentar a concentração solar em dispositivos óticos com formação de imagem. Para se compreender as características que tornam uma lente ou espelho aplanático, é necessário conceituar efeitos óticos como aberração esférica e coma.

### 2.2 ABERRAÇÃO ESFÉRICA

Aberração é qualquer falha de um espelho ou lente no que tange à precisão de produzir uma imagem verdadeira. As aberrações são indesejáveis a qualquer concentrador solar por fluxo. Dois dentre os fatores que mais afetam a performance de um sistema ótico são: aberração esférica, coma.

A aberração esférica é uma imperfeição da imagem devido à curvatura esférica da lente ou do espelho. Quando um objeto está no infinito, a imagem se forma no foco. Entretanto, devido à aberração esférica, a distância focal é diferente para raios que atravessam a lente em diferentes distâncias do eixo ótico conforme observado na figura 1. Assim, a aberração esférica representa um empecilho para que os raios de um ponto objeto converjam para um ponto imagem depois de atravessar um sistema ótico. A presença da aberração esférica reduz a concentração solar no absorvedor, visto que há um deslocamento do foco.

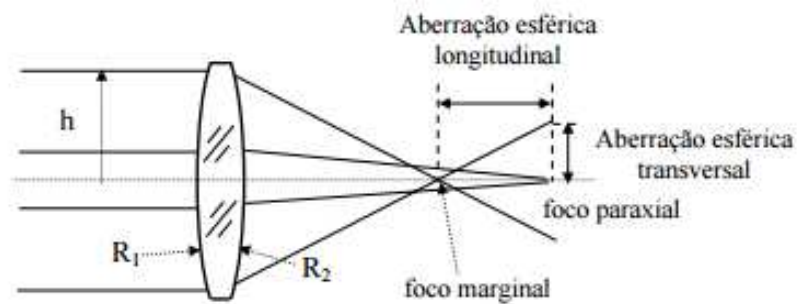


Figura 1 – (Adaptado [www.lambdasys.com](http://www.lambdasys.com)) – Aberração esférica apresentada por uma lente que gera imagem num foco cuja posição não está disposta no eixo óptico longitudinal e transversal, fora do foco paraxial.

### 2.3 COMA

O nome dessa imperfeição na formação de imagem se dá devido à forma de um cometa na imagem. Neste caso, a imagem de um ponto fora do eixo óptico aparece como um borrão de luz com a forma de um cometa. O coma reduz a possibilidade da lente ou espelho formar a imagem quando os feixes de luz incidem em suas bordas. Uma lente com coma considerável pode produzir uma imagem nítida no campo central, mas que se torna bastante borrada em direção às bordas. No que tange à energia solar por concentração, perde-se muita radiação nas bordas dos espelhos, reduzindo a radiação que atinge o absorvedor. Tal efeito é indesejado e reduz o fluxo de radiação que atinge o absorvedor.

O coma ocorre quando uma lente produz a imagem de um objeto fora do eixo óptico, à medida em que os raios passam através da região mais externa da lente ou do espelho, eles são focalizados em diferentes pontos. Esses pontos podem se afastar do eixo (coma positivo) ou se aproximar do eixo (coma negativo). Em geral, quando um feixe de raios paralelos passa por uma lente numa dada distância do seu centro, ele é focalizado de maneira a formar um anel no plano focal, conhecido como círculo comático, conforme pode ser observado na figura 2. A soma de todos esses círculos resulta numa forma de cometa. Similar à aberração esférica, o coma pode ser minimizado e, em alguns casos, eliminado pela escolha das curvaturas de duas lentes com parâmetros desejados. Podem-se obter lentes ou espelhos com aberração esférica e coma desprezíveis de acordo com a ótica de imagem composta por espelhos ou lentes denominadas aplanáticas.

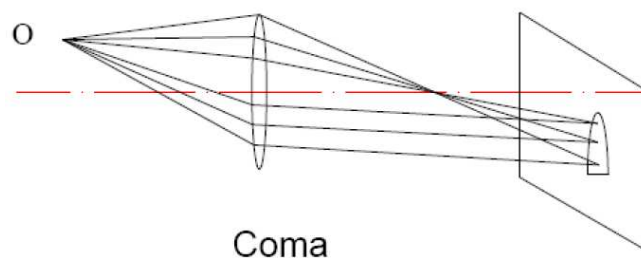


Figura 2: (Adaptado [www.lambdasys.com](http://www.lambdasys.com)) – Coma formado por meio dos feixes incidentes em uma lente esférica.

### 2.3 APLANÁTICO

Entende-se por aplanático, o espelho ou lente que apresenta uma ótica de imagem, tendo sido concebido para eliminar completamente a aberração esférica e o coma. Trata-se de uma adaptação de

duas superfícies óticas com graus de liberdade, podendo ser reflexivas ou refrativas. Os aplanáticos foram inicialmente desenvolvidos para aplicações com telescópios (Lynden-Bell, 2002). O problema matemático para eliminação da aberração esférica e coma foi solucionado há muitos anos (Head, A. K., 1957), contudo a partir de 2002 que os aplanáticos passaram a ser revisitados e aplicados à concentração de energia solar (Mashall, H., Feuermann, D. e Gordon, J., 2015).

Para o espelho ser considerado aplanático, o mesmo deve obedecer às seguintes condições (Figura 3):

- a) Princípio de Fermat – A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o percurso para percorrer é mínimo (Eq. 4).

$$L_1 + nL_2 + nL_3 = \text{constante} \quad (4)$$

- b) Lei de Snell – Relacionando o ângulo de entrada com o ângulo de saída do feixe de luz que passa por uma interface com índices de refração distintos, (Eq. 5).

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2 \quad (5)$$

- c) Condição para o seno de Abbe – Amplificação constante para todos os raios paraxiais. Assim, a partir da Figura 3, mantendo a amplificação constante, (Eq. 6).

$$f = \frac{r}{\text{sen}\theta} = \text{constante} \quad (6)$$

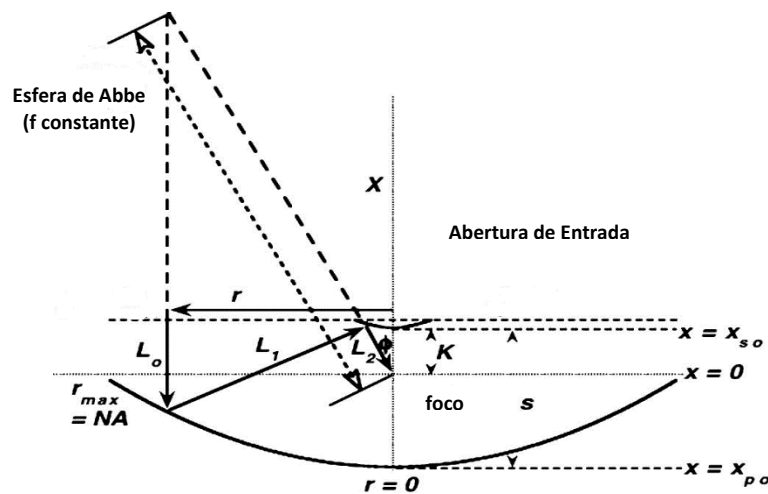


Figura 3: (Adaptada de Ostroumov, Gordon e Feuermann, 2009) - Ilustração da construção de um aplanático com dois espelhos determinados pelo cumprimento do princípio de Fermat, lei de Snell e a condição do seno de Abbe.

A condição de aplanático é alcançada pelo cumprimento do princípio de Fermat, lei de Snell e a condição do seno de Abbe. O foco é escolhido no centro do sistema de coordenadas e o comprimento da escala é ajustado de acordo com o comprimento do foco, sendo definido pela unidade (Ostroumov, Gordon e Feuermann, 2009). O raio do primário do aplanático é igual à abertura numérica (AN).

Como pode ser observado na Figura 3, s é um parâmetro adimensional e representa a separação dos vértices do primário e do secundário do aplanático, de forma que temos (Eq. 7):

$$s = \frac{x_{po} - x_{s0}}{f} \quad (7)$$

Onde  $x_{p0}$  e  $x_{s0}$  são as coordenadas axiais dos vértices do primário e secundário, respectivamente.

O  $K$  representa outro parâmetro adimensional fundamental para a construção do aplanático, relacionando a distância entre o foco e o vértice do secundário (Eq. 8):

$$K = \frac{-x_{s0}}{f} \quad (8)$$

A partir dos parâmetros adimensionais  $s$  e  $K$ , é possível definir o conjunto de pontos pertencentes ao primário e ao secundário do aplanático, desde que sejam cumpridas as relações (Lynden-Bell, 2002) a seguir (Eq. 9 a 14):

$$r_p = s \operatorname{sen}(\phi) \quad (9)$$

$$x_p = s - \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{g(\phi)}{s} (1 - Kf(\phi)) \cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (10)$$

$$r_s = \frac{2sKf(\phi)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{Kf(\phi)\tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + g(\phi)} \quad (11)$$

$$x_s = -r_s \cot(\phi) \quad (12)$$

$$g(\phi) = s - (1 - s) \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (13)$$

$$f(\phi) = \left| \frac{g(\phi)}{s} \right|^{\frac{1}{s-1}} \quad (14)$$

Os índices P e S referenciam-se ao primário e ao secundário, respectivamente. As variáveis  $r_p$  e  $x_p$  indicam, como pode ser visualizado na Figura 3, distância no eixo  $r$  e a altura no eixo  $x$  do aplanático primário. Já as variáveis  $r_s$  e  $x_s$ , indicam a distância no eixo  $r$  e a altura no eixo  $x$  do aplanático secundário.

Como pode ser observado, as equações que relacionam as dimensões do primário e secundário do aplanático aos parâmetros  $s$  e  $K$ . Logo, ajustando  $s$  e  $K$ , podemos ter aplanáticos com dimensões distintas. Dependendo de  $s$  e  $K$  escolhidos.

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

A partir das equações de (Eq. 9) à (Eq. 14), responsáveis por delimitar tanto o primário, quanto o secundário do aplanático, cumpre-se variar os parâmetros  $s$  e  $K$ , bem como propor configurações de aplanáticos que possam vir a ser concentradores, tornando-se soluções que ampliem a concentração de fluxo a parâmetros superiores aos já existentes.

A partir da utilização de aplanáticos para a concentração solar e de acordo com  $s$  e  $K$ , existem as seguintes possibilidades de uso de aplanático para concentração de fluxo, seguindo a distribuição descrita na Tabela 1.

É possível observar, ao analisar a Tabela 1, que as configurações 7 e 8 são inviáveis para a concentração solar, visto que possuem foco virtual. Das configurações de aplanático de 1 a 6, há algumas mais e outras menos adequadas para a concentração solar, visto que algumas são não compactas e outras apresentam perdas, de forma que foram escolhidas para uma análise mais aprofundada as configurações 3 e 5 indicadas na Tabela 1.

Doravante, a configuração 3 indicada na Tabela 1 passa a ser denominada aplanático hiperbólico, assim como, a configuração 5 passa a ser denominada aplanático elíptico.

Configuração	s	K	Absorvedor	Observações
1	>0	<0	para cima	Factível, porém com grandes perdas
2	>0	<0	para baixo	Factível, contudo há grande diferença nas dimensões de primário e secundário
3	>0	>0	para cima	Factível, pode-se obter máxima performance, sendo compacto.
4	>0	>0	para baixo	Factível, porém apresenta grandes dimensões. Não compacto.
5	<0	<0	para cima	Factível, pode-se obter máxima performance, sendo compacto.
6	<0	<0	para baixo	Factível, contudo há grande diferença nas dimensões de primário e secundário
7	<0	>0	para cima	Inviável fisicamente. Foco virtual. Bloqueio total.
8	<0	>0	para baixo	Inviável fisicamente. Foco virtual. Bloqueio total.

Tabela 1 – Adaptado (Gordon, 2010) – Tabela contendo todas as configurações possíveis de aplanáticos, envolvendo parâmetros s e K, bem como a posição do absorvedor.

### 3.1 APLANÁTICO HIPERBÓLICO

Conforme exposto na Tabela 1, para os parâmetros s e K positivos, com o absorvedor voltado para cima, temos a configuração de espelhos aplanático hiperbólico (Gordon, 2010).

Fazendo uso das equações de (Eq. 9) à (Eq. 14) que fornecem as posições do primário e do secundário do aplanático, e, considerando a configuração 3 indicada na Tabela 1, temos o aplanático hiperbólico. Nessa etapa do trabalho, cumpre analisar fatores importantes na concentração solar de forma que  $s > 0$  e  $K > 0$ .

Foram analisados diversos valores para os parâmetros s e K, de acordo com a área de sombra formada pelo secundário sobre o primário, bem como de acordo com o formato do primário e secundário. Foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros adimensionais s e K respectivamente 0,43 e 0,0385, obtendo-se o aplanático hiperbólico da Figura 4.

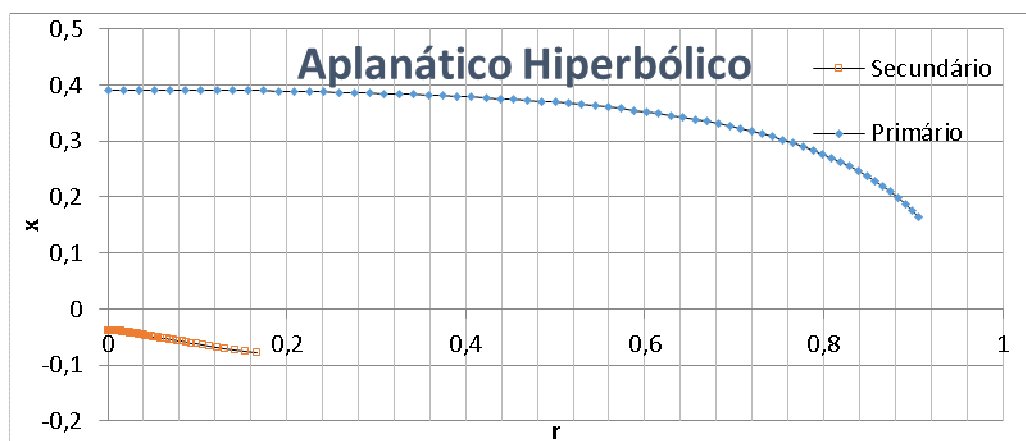


Figura 4 – Aplanático Hiperbólico com parâmetros  $s=0,43$  e  $K=0,0385$ .

Na Figura 4, pode-se observar que o primário está marcado com a cor azul e o secundário com a cor laranja, ficando o foco na origem dos eixos r e x.

Para o aplanático hiperbólico, utilizando-se os valores de parâmetros  $K=0,0385$ , variando-se o parâmetro  $s$  de 0,31 a 0,56 e tomando-se como referência  $\theta_s=10\text{mrad}$ , foi possível obter concentrações efetivas (já excluídas as sombras do secundário do aplanático sobre o primário) da ordem de 50 sóis para uma abertura numérica (AN) de 0,85, como pode ser observado na Figura 5.

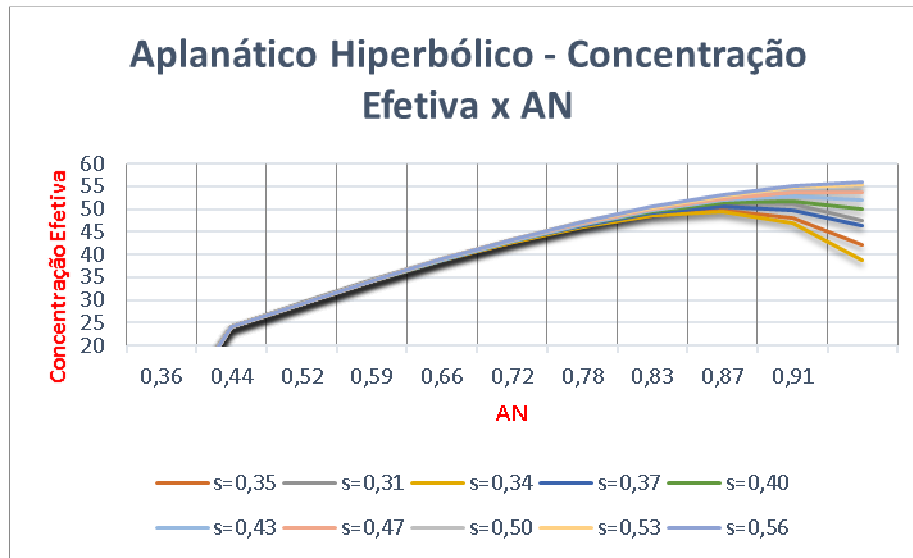


Figura 5 – Concentração Efetiva x Abertura Numérica em função da variação do parâmetro  $s$ , mantendo-se  $K=0,0385$ .

### 3.2 APLANÁTICO ELÍPTICO

Por meio das equações (Eq. 9) à (Eq. 14) que fornecem as posições do primário e do secundário do aplanático, e, considerando a configuração 5 indicada na Tabela 1, temos o aplanático elíptico.

Conforme ilustrado na figura 6, após análise de diversos valores dos parâmetros que geram o aplanático, foram considerados  $s$  e  $K$  como sendo respectivamente,  $-0,61$  e  $-0,23$  e por meio das equações paramétricas que geram o aplanático, foi possível obter o primário e secundário conforme indicado na figura.

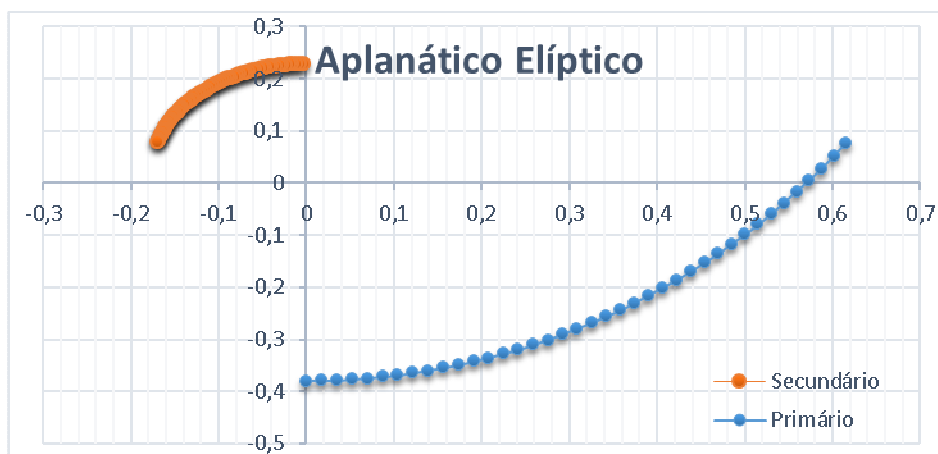


Figura 6 – Aplanático elíptico – Parâmetros utilizados para a construção:  $s=-0,61$  e  $K=-0,23$ ,  $NA=0,9$

Foi analisada a concentração para a configuração aplanático elíptico, utilizando-se os valores de parâmetros  $K=-0,23$  e variando-se o parâmetro  $s$  de  $-0,30$  a  $-0,70$ , sendo obtidas concentrações efetivas (excluídas as sombras do secundário do aplanático sobre o primário) que variavam de 30 a 57,5 sóis, de acordo com o valor da abertura numérica (Figura 7).

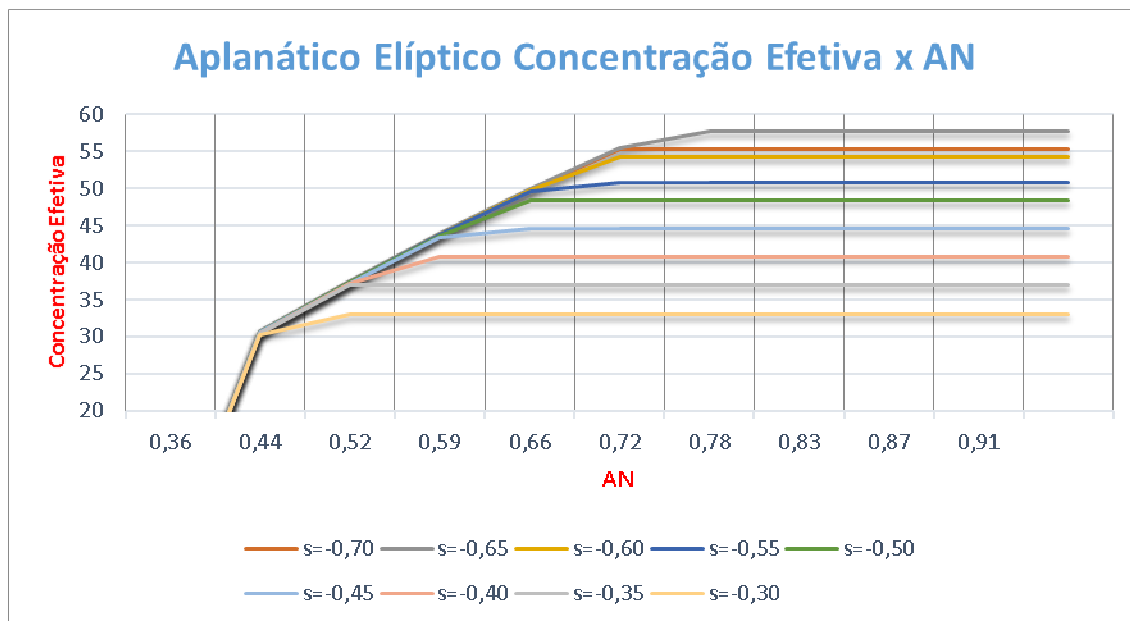


Figura 7 – Concentração Efetiva x Abertura Numérica em função da variação do parâmetro  $s$ , mantendo-se  $K=-0,23$ .

#### 4. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, foram abordados conceitos como aberração esférica e coma que estão normalmente presentes na maioria dos concentradores de fluxo e que geram perdas na eficiência do concentrador.

O aplanático é apresentado como uma alternativa para formação de imagens com a eliminação da aberração esférica e do coma. O aplanático, que já era utilizado em instrumentos de precisão como o telescópio desde o início do século XX, somente passou a ser utilizado em concentração solar a partir das soluções analíticas das equações que delimitam o seu primário e o secundário, realizadas por Lynden-Bell e Willstop em 2002 e 2003.

Foram analisados os aplanáticos que seriam viáveis ou não dentro das variações de  $s$ ,  $K$  e da posição do absorvedor. Então, foram apresentados oito possíveis aplanáticos, dentre os quais há dois aplanáticos que apresentam foco virtual, não podendo ser utilizados em concentração solar. Dentre as seis configurações de aplanáticos restantes, foram apresentadas duas que seriam adequadas para a concentração solar, denominadas: aplanático hiperbólico e o elíptico.

Para os aplanáticos elíptico e hiperbólico, foram escolhidos valores dos parâmetros adimensionais  $s$  e  $K$ , bem como foram apresentados os formatos do primário e secundário de ambas as configurações.

Em seguida, foram verificadas as concentrações obtidas em cada uma das configurações, sendo que para o concentrador hiperbólico, a concentração obtida para uma abertura numérica de 0,85 encontrada foi em torno de 50 sóis, para o caso do aplanático elíptico, chegou-se a valores próximos a 50 sóis, dependendo dos parâmetros escolhidos.



Diante da contextualização e dos resultados apresentados, os aplanáticos elíptico e hiperbólico apresentam-se como uma alternativa à concentração solar de fluxo, pois chegam a concentrações superiores às encontradas em configurações do tipo Fresnel e do tipo concentrador parabólico. Tornando-se mais uma alternativa viável para a geração de energia elétrica por concentração de fluxo através de dupla reflexão.

## REFERÊNCIAS

- Schwarzschild, K. Investigation of the Geometric Optics.-III. Abh. Konigl. Ges. Wis. Göttingen Math-phys. Kl. 4, 1–3 (1905–1906).
- Wassermann, G. D. e Wolf, E. On the Theory of Aplanatic Aspheric Systems. Proc. Phys. Soc. B 62(1), 2–8 (1949).
- Welford, W. T. Aplanatism and Isoplanatism. Progress in Optics 13, 267–293 (1976).
- Mertz, L. Geometrical design for aspheric reflecting systems. Applied Optics. 18(24), 4182–4186 (1979).
- Lynden-Bell, D. Exact Optics: A Unification of Optical Telescope Design. Mon. Not. R. Astron. Soc. 334(4), 787–796 (2002).
- Willstrop, R. V. e Lynden-Bell, D. Exact Optics — II. Exploration of Designs On- and Off-Axis. Mon. Not. R. Astron. Soc. 342(1), 33–49 (2003).
- Rabl, A., 1985. Active Solar Collectors and Their Applications”. Oxford University Press. New York.
- Winston, R., 1970. “Light Collection within the framework of geometrical optics”. J. Opt. Soc. Am. 60, 245, 1970.
- Baranov, V. K.; Melnikov, G. K., 1966. Sob. J. Opt. Tech., 33, 408, 1966.
- Head A. K. The two-mirror aplanat. Proc. Phys. Soc. London B 70, 945–949 (1957).
- Marshall, H. ; Feuermann D. e Gordon J. M. “New types of refractive-reflective aplanats for maximal flux concentration and collimation” Optics Express, Vol 23, n 24, 1541-1548.
- Ostroumov, N. ; Gordon J. M. e Feuermann D. “Panorama of dual-mirror aplanats for maximum concentration” Applied Optics, Vol 48, n 26, 4926-4931.

## ABSTRACT

The present work is to carry out theoretical basis of factors that affect the performance of solar concentration systems, and to present the aplanat as an alternative to solar concentration. A review is made and concepts such as spherical aberration and coma present in most mirrors and lenses. The aplanat, which has historically been used in precision devices such as telescope, and is currently also used as a hub forming free stock photo of spherical aberration and coma then appears. The work is aimed to provide the theoretical basis for the use of aplanatic concentrator and analyze the various configurations of it according to the dimensionless parameters that determine it. The most appropriate settings for the use of aplanático as concentrator are being analysed, and finally the effective concentrations obtained in both aplanatic elliptical and hyperbolic.

**Keywords:** aplanatic, optical, solar concentrator, spherical aberration, coma.